:: Rotacija koordinatnih osi ::

Neke fizikalne veličine poput indeksa loma u anizotropnim sredstvima ovise o iznosu i smjeru, a nisu vektori. Stoga se nameće potreba **poopćavanja definicije vektora**. Međutim, fizikalne veličine, pomoću kojih opisujemo ponašanje raznih pojava, ne smiju ovisiti o izboru referentnog sustava pa ćemo najprije promotriti ponašanje komponenti vektora položaja pri rotacijama koordinatnih osi.

Rotacijom koordinatnih osi referentni sustav K postaje K'

- koordinatne osi :: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1', x_2', x_3')$
- jedinični vektori :: $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}) \rightarrow (\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$
- vektor položaja :: $\vec{r} = x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} + x_3\hat{k} = x_1'\hat{\imath}' + x_2'\hat{\jmath}' + x_3'\hat{k}'$

$$\vec{r}\cdot\hat{\imath}' = x_1\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}' + x_2\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}' + x_3\hat{k}\cdot\hat{\imath}'$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}' = \cos\sphericalangle(\hat{\imath}',\hat{\imath}) = \cos\sphericalangle(x_1', x_1) = a_{11}$$

$$x_1' = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{x' = Ax} \qquad x = A^{\tau}x' \qquad \boxed{A^{\tau} = A^{-1}}$$

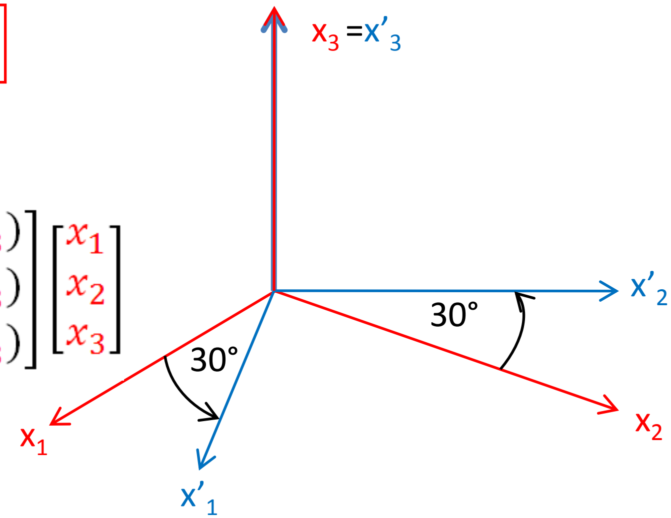
$$\boxed{a_{ij} = \cos\sphericalangle\left(x'_i, x_j\right)}$$

:: T1 ::

Izrazite radij-vektor točke T(1,-2,3) u novom koordinatnom sustavu koji se dobije rotacijom Kartezijevog sustava oko osi z za 30° suprotno smjeru kazaljke na satu. Usporedite duljine vektora u jednom i drugom koordinatnom sustavu.

$$\boxed{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{a_{ij} = \cos\sphericalangle(x'_i, x_j)}$$



$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\sphericalangle(x'_1, x_1) & \cos\sphericalangle(x'_1, x_2) & \cos\sphericalangle(x'_1, x_3) \\ \cos\sphericalangle(x'_2, x_1) & \cos\sphericalangle(x'_2, x_2) & \cos\sphericalangle(x'_2, x_3) \\ \cos\sphericalangle(x'_3, x_1) & \cos\sphericalangle(x'_3, x_2) & \cos\sphericalangle(x'_3, x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \cos 60^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 120^\circ & \cos 30^\circ & \cos 90^\circ \\ \cos 90^\circ & \cos 90^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$
$$x'_2 = \frac{-1}{2} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$
$$x'_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ x'_2 &= \frac{-1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ x'_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{r} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{14}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\hat{\imath}' - \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\hat{\jmath}' + 3\hat{k}' \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{14}$$

:: Einsteinova konvencija o zbrajanju ::

Ako se u izrazu indeks pojavljuje dvaput, onda se izraz sumira po svim dopustivim vrijednostima tog indeksa, a ako jedanput, onda slična jednadžba vrijedi za sve komponente navedene veličine.

$$y = c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n \qquad y = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i \xleftrightarrow[]{\text{po E. konvenciji}} y = c_i x^i$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} x_i \;;\, j = 1,2,3 \xleftrightarrow[]{\text{po E. konvenciji}} x'_j = a_{ji} x_i$$

:: Poopćenje definicije vektora ::

Definiciju vektora sada možemo poopćiti preko načina na koji se njegove komponente transformiraju (kovariraju) kod rotacije koordinatnog sustava:

Za skup od N veličina Vj kažemo da su **komponente N-dimenzionalnog vektora V**, ako i samo ako su njihove vrijednosti u rotiranom koordinatnom sustavu dane sa

$$\boxed{V'_i = a_{ij} V_j} \qquad \boxed{a_{ij} = \cos\sphericalangle\left(x'_i, x_j\right)}$$

Neovisnost o referentnom sustavu (koja slijedi iz kovarijancije) je potrebna da bi se formulirali univerzalni zakoni fizike koji uključuju vektore ili općenitije tenzore.

:: Vektori u Kartezijevim koordinatama ::

Samo u Kartezijevim koordinatama nema razlike između kovarijantnih i kontravarijantnih transformacija:

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \qquad V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j$$

:: Tenzori ::

Tenzor je matematička ili fizikalna veličina invarijantna na translacije, a ima N^n komponenti gdje je N dimenzija prostora te n stupanj tenzora.

Rang (stupanj) tenzora možemo odredit promatrajući ponašanje njegovih komponenti pri prijelazu iz koordinatnog sustava K u koordinatni sustav K' :

$$\boxed{t'_{\alpha\beta\ldots\mu} = \sum_{i=1}^{N} \cdots \sum_{m=1}^{N} a_{\alpha i} \cdots a_{\mu m} t_{ij\ldots m}}$$

gdje indeksa imamo n (stupanj tenzora), a svaki poprima vrijednosti od 1 do N (dimenzija prostora).

- tenzor 0. stupnja ima samo jednu komponentu (invarijantan je) :: skalar $\boxed{A' = A}$
- tenzor 1. stupnja :: vektor
- tenzor 2. stupnja :: 9 komponenti u R^3 (npr. tenzor tromosti, tenzor napetosti…)

Prema transformacijama komponenti tenzore dijelimo na (navedene su relacije za tenzore 2. stupnja):

➢ kovarijantne (indeksi dolje) $$\boxed{C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}}$$

➢ kontravarijantne (indeksi gore) $$\boxed{A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}}$$

➢ miješane (indeksi analogno prethodnima) $$\boxed{B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^{k}_{l}}$$

Tenzor 2. stupnja je **simetričan** ako vrijedi, $S^{ij} = S^{ji}$ a **antisimetričan** ako $A^{ij} = -A^{ji}$

:: Algebarske operacije sa tenzorima ::

- Množenje tenzora brojem te zbrajanje ili oduzimanje tenzora istog stupnja vrši se po komponentama analogno operacijama s vektorima i matricama.
- Direktni produkt:

$B_j^i B^{kl} = C_j^{ikl}$	$a_i' b'^j = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} a_k \frac{\partial x_j'}{\partial x_l} b^l$	$C_j'^{ikl} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial x_j'} \frac{\partial x_k'}{\partial x_p} \frac{\partial x_l'}{\partial x_q} C_n^{mpq}$

:: T2 ::

Koristeći invarijantnost skalara na rotacije, pokažite da je skalarni produkt vektora skalar.

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_k A_k' \cdot B_k' = \sum_k \left(\sum_i a_{ki} A_i \cdot \sum_j a_{kj} B_j \right) =$$

$$= \sum_k \sum_i \sum_j a_{ki} A_i a_{kj} B_j = \sum_k \sum_i \sum_j (a_{ki} a_{kj}) A_i B_j$$

$$= \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_j A_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

:: T3 ::

Ako je kontravarijantni tenzor 2. stupnja S simetričan, a A antisimetričan, odredite $A^{ij}S_{ij}$.

Uvijek vrijedi $A^{ij} S_{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} S_{ij} + A^{ij} S_{ij})$

U pojedinom pribrojniku umjesto ij mogu pisati bilo koji drugi indeksi pa ih možemo zamijeniti

$$A^{ij} S_{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} S_{ij} + A^{ji} S_{ji})$$

Iskoristimo li zadanu simetričnost $A^{ij} = -A^{ji}$ $S^{ij} = S^{ji}$ imamo

$$A^{ij} S_{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} S_{ij} - A^{ij} S_{ij}) = 0$$

:: T4 ::

Pokažite da se proizvoljni tenzor ranga 2 može napisati kao zbroj simetričnog i antisimetričnog tenzora.

Kako su dokazi za kovarijantne, kontravarijantne i miješane tenzore slični, dokazat ćemo za kontravarijantni:

$$T^{ij} = \frac{1}{2}T^{ij} + \frac{1}{2}T^{ij}$$

Dodamo li i oduzmemo $\frac{1}{2}T^{ji}$ imamo $T^{ij} = \dfrac{T^{ij}+T^{ji}}{2} + \dfrac{T^{ij}-T^{ji}}{2}$

Zamjena indeksa odgovara transponiranju matrične reprezentacije vektora pa ako transponiramo prvi sumand

$$\left(\frac{T^{ij}+T^{ji}}{2}\right)^{\tau} = \frac{(T^{ij})^{\tau}+(T^{ji})^{\tau}}{2} = \frac{T^{ji}+T^{ij}}{2} = \frac{T^{ij}+T^{ji}}{2}$$

dobijemo isti taj što znači: $\dfrac{T^{ij}+T^{ji}}{2}$ je simetričan tenzor.

Transponiranjem drugog imamo

$$\left(\frac{T^{ij}-T^{ji}}{2}\right)^{\tau} = \frac{(T^{ij})^{\tau}-(T^{ji})^{\tau}}{2} = \frac{T^{ji}-T^{ij}}{2} = -\frac{T^{ij}-T^{ji}}{2}$$

što znači $\dfrac{T^{ij}-T^{ji}}{2}$ je antisimetričan tenzor.

:: T5 ::

Dokažite: doprinos antisimetričnog dijela metričkog tenzora u kvadratu linijskog elementa iznosi 0.

Kvadrat linijskog elementa: $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$

Koristeći tvrdnje dokazane u prethodnom zadatku, metrički tenzor možemo zapisati kao

$$g_{ik} = a_{ik} + b_{ik}; \quad a_{ik} = a_{ki},\ b_{ik} = -b_{ki}$$

$$a_{ik} = \frac{g_{ik} + g_{ki}}{2}, \quad b_{ik} = \frac{g_{ik} - g_{ki}}{2}$$

$$ds^2 = \underbrace{\left(\frac{g_{ik} + g_{ki}}{2}\right)dx^i dx^k}_{simetri\check{c}ni\ dio} + \underbrace{\left(\frac{g_{ik} - g_{ki}}{2}\right)dx^i dx^k}_{antisimetri\check{c}ni\ dio}$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad g_{ik} = g_{ki}$$

$$ds^2 = \underbrace{\left(\frac{g_{ik} + g_{ki}}{2}\right)}_{=g_{ik}} dx^i dx^k + \underbrace{\left(\frac{g_{ik} - g_{ki}}{2}\right)dx^i dx^k}_{=0}$$

:: Konjugirani (pridruženi) tenzor ::

Konjugirani tenzor dobivamo operacijama spuštanja/podizanja indeksa:

$$\boxed{\begin{aligned} A^i &= g^{ij}A_j \\ A_i &= g_{ij}A^j \end{aligned}}$$

:: T6 ::

Dokažite: $A^iB_i = A_iB^i$, a oba su i invarijantna dok A_iB_i nije.

Koristeći operacije podizanja i spuštanja indeksa dokazujemo jednakost:

$$A^iB_i = g^{ij}A_jg_{ik}B^k = g^{ij}g_{ik}A_jB^k = \delta_{jk}A_jB^k = A_jB^j$$

Pošto se radi o jednakim tenzorima dovoljno je pokazati invarijantnost jednoga. Polazeći od umnoška u rotiranom koordinatnom sustavu i koristeći transformacijske relacije prelazimo u početni:

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}A^j\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}B_k = \delta_{jk}A^jB_k = A^jB_j = A^iB_i \quad \Longrightarrow \quad \text{invarijantan izraz}$$

$$\bar{A}_i\bar{B}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}A_j\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}B_k \quad \Longrightarrow \quad \text{ne možemo više reducirat, znači: izraz nije invarijantan}$$

:: Kvocijentno pravilo ::

Ako relacije vrijede u svim rotiranim Kartezijevim sustavima te ako je rang od A i B naznačen brojem indeksa , K je tenzor ranga koji je naznačen ukupnim brojem svojih indeksa:

$K^i A_i = B$	$K^i_j A^j = B^i$	$K^i_j A^j_k = B^i_k$	$K^{ijkl} A_{ij} = B^{kl}$	$K_{ij} A_k = B_{ijk}$

:: T7 ::

Dokažite kvocijentno pravilo: $K^i_j A^j_k = B^i_k$

Pravilo vrijedi u svakom zarotiranom Kartezijevom sustavu pa ćemo ga napisati u crtkanom:

$$K'^i_j A'^j_k = B'^i_k = a^m_k a^i_l B^l_m =$$ // B transformiramo u necrtkani

$$= a^m_k a^i_l \left(K^l_n A^n_m\right)$$ // Primijenimo kvocijentno pravilo

$$= a^m_k a^i_l \left(K^l_n a^n_j a^k_m A'^j_k\right) = a^i_l a^n_j K^l_n A'^j_k$$ // A transformiramo u crtkani

$$K'^i_j A'^j_k = a^i_l a^n_j K^l_n A'^j_k$$ // Izjednačimo početak i kraj jednakosti

$$\left(K'^i_j - a^i_l a^n_j K^l_n\right) A'^j_k = 0$$ // A općenit pa je izraz u zagradi 0

$$K'^i_j = a^i_l a^n_j K^l_n$$ // Način transformacije tenzora 2. ranga

:: Epsilon tenzor (tenzor 3. stupnja) ::

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 \text{, ako su i, j, k cikliči} \\ -1 \text{, ako su i, j, k aciklički} \\ 0 \text{, inače} \end{cases}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\boxed{A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k}$$

:: T8 ::

Koristeći identitet $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}$ za tenzore, dokažite:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$
$$= \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{kpq} B_p C_q$$
$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} A_j B_p C_q$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kij}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} A_j B_p C_q = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kpq} A_j B_p C_q$$

$$k \to i, i \to j, j \to k$$

$$(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq}) A_k B_p C_q$$
$$= (\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}) A_k B_p C_q$$
$$= \delta_{jp} B_p \delta_{kq} A_k C_q - \delta_{jq} C_q \delta_{kp} A_k B_p$$
$$= B_j A_q C_q - C_j A_p B_p$$

$$\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

:: Metrički tenzor ::

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \tilde{g}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k}$$

:: T9 ::

Odredite metrički tenzor u cilindričnim koordinatama:

Cilindrične koordinate $\tilde{x}^i = \{r, \theta, l\}$ Kartezijeve koorinate $x^i = \{x, y, z\}$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = l$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial x}{\partial r} \equiv x_r = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial y}{\partial r} \equiv y_r = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \equiv x_\theta = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \equiv y_\theta = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial z}{\partial z} \equiv z_l = 1$$

$$\Rightarrow$$

$$g_{rr} = x_r x_r + y_r y_r = 1$$

$$g_{\theta\theta} = x_\theta x_\theta + y_\theta y_\theta = r^2$$

$$g_{zz} = 1$$

$$g^{rr} = 1$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$$

$$g^{zz} = 1$$

:: Kutni moment (moment impulsa) za proizvoljnu kutnu brzinu ::

Kutnu brzinu možemo zapisati u općenitom obliku:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z).$$

Moment impulsa iznosi

$$L = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)$$

Primijenimo li $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ imamo:

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z \end{bmatrix}$$

Prema tome opći izraz za moment impulsa glasi:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\}$$

gdje su

$$I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha$$

te analogno definiramo ostale komponente I_{ij}.

:: Tenzor inercije I ::

Dobivene relacije možemo zapisati u matričnom obliku (=> moment inercije I tenzor je 2. stupnja)

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha$$

$\mathbf{I} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}$ => simetrični tenzor

:: T10 (a) ::

Pronađite moment inercije homogene kocke mase M i stranice a pri rotaciji oko vrha (ishodište je u vrhu, orjentacija osi nije određena).

Kada nađemo tenzor inercije, možemo odabrati bilo koju kutnu brzinu rotacije i odmah znamo pripadni moment impulsa $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

Kako se radi o jednolikoj raspodjeli mase potrebno je izračunati 9 integrala za odrediti tenzor inercije. Međutim, zbog simetrije svi dijagonalni elementi su isti, a ostali su različiti, ali jednaki međusobno pa je dovoljno izračunati 2 integrala.

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \tilde{\rho}(y^2 + z^2) \qquad \tilde{\rho} = M / a^3$$

$$I_{xx} = \tilde{\rho}\left(\int_0^a dx \int_0^a y^2 dy \int_0^a dz + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z^2 dz\right) = \tfrac{2}{3}\tilde{\rho}a^5 = \tfrac{2}{3}Ma^2.$$

$$I_{xy} = -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \tilde{\rho} xy, = -\tilde{\rho}\int_0^a x dx \int_0^a y dy \int_0^a dz = -\tfrac{1}{4}\tilde{\rho}a^5 = -\tfrac{1}{4}Ma^2.$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

:: T10 (b) ::

Usporedite smjerove vektora kutne brzine i momenta impulsa za slučaj rotacije oko x-osi koja prolazi vrhom kocke.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{12}\omega \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Ma^2\omega \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Moment impulsa nema isti smjer kao os rotacije.

:: T10 (c) ::

Usporedite smjerove vektora kutne brzine i momenta impulsa za slučaj rotacije oko osi koja prolazi vrhom kocke i ide dijagonalno kroz kocku.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\boldsymbol{\omega}$$

Moment impulsa ima isti smjer kao os rotacije (kutna brzina).

:: T10 (d) ::

Odredite moment inercije za slučaj kada se središte rotacije nalazi u centru kocke te usporedite smjerove vektora kutne brzine i momenta impulsa

$$I_{xx} = \tilde{\rho}\left(\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dz + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz\right) = 2\tfrac{2}{3}\tilde{\rho} a^2 (a/2)^3 = \tfrac{1}{6} Ma^2$$

$$I_{xy} = -\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \tilde{\rho} xy, = -\tilde{\rho}\int_{-a/2}^{a/2} xdx \int_{-a/2}^{a/2} ydy \int_{-a/2}^{a/2} dz = 0$$

$$\mathbf{I} = \frac{Ma^2}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\mathbf{1} \qquad \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{6}\boldsymbol{\omega}$$

:: Glavne osi ::

Moment je inercije u koordinatnom sustavu odabranom pod (d) **dijagonalna matrica**, a moment impulsa uvijek ima isti smjer kao i kutna brzina bez obzira na položaj osi rotacije. Koordinatni sustav u kojem je tenzor dijagonalan nazivamo sustav **glavnih osi**. Kako se komponente tenzora mijenjaju pri rotaciji, rotacijom možemo (ako se radi o **simetričnom tenzoru**) proizvoljno odabrani koordinatni sustava transformirati u sustav glavnih osi u kojem je taj tenzor **dijagonalan**. Iz gore dobivene relacije možemo napisati općeniti izraz:

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega} \quad \text{-->} \quad \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\mathbf{1}\boldsymbol{\omega} \quad \text{-->} \quad (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{-->} \quad \det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}) = 0$$

➔ Znači: problem određivanja glavnih osi svodi se na određivanje svojstvenih vrijednosti λ (vrijednosti na dijagonali) i svojstvenih vektora ω. Jedinični vektori koordinatnog sustava u kojem je tenzor dijagonalan definirani su preko normiranih svojstvenih vektora $\mathbf{v}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$

$$\vec{e}_i' = v_k^{(i)} \vec{e}_k$$

:: T10 (e) ::

Koristeći podatke izračunate pod (a), odredite glavne osi rotacije za kocku koja rotira oko vrha.

$$\mathbf{I} = \mu \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}; \mu = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 8\mu - \lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - \lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - \lambda \end{vmatrix} = (2\mu - \lambda)(11\mu - \lambda)^2 = 0$$

➔ Za $\lambda_1 = 2\mu = \frac{1}{6} Ma^2$ imamo:

$$\begin{bmatrix} 8\mu - \lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - \lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2\omega_x - \omega_y - \omega_z &= 0 \\ -\omega_x + 2\omega_y - \omega_z &= 0 \\ -\omega_x - \omega_y + 2\omega_z &= 0 \end{aligned}$$

Rj: $\omega_x = \omega_y = \omega_z$

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➔ Za $\lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu = \frac{11}{12} Ma^2$ imamo:

$$\mu \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_x + \omega_y + \omega_z = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2,3} \cdot \mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\omega_x + \omega_y + \omega_z \right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{2,3} \perp \mathbf{e}'_1$$

$$\mathbf{I}' = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

➔Znači: Možemo uzeti osi, s ishodištem u vrhu kocke, jednu u smjeru **e'**$_1$, a druge dvije u smjeru dva proizvoljna međusobno okomita vektora **e'**$_2$ i **e'**$_3$ koji su okomiti na **e'**$_1$ i dobit ćemo dijagonalan oblik tenzora **I'**.